Ćwiczenie 4 – interpolacja splajnem kubicznym

Treść zajęć
tworzenie macierzy trójdiagonalnej (*diag*, *ones*), przygotowanie danych do wykresu funkcji zadanej odcinkami, wykres 2 funkcji ze znacznikami, wyrównanie skali x-y („*equal*”), limity wartości na skali (*xlabel*, *ylabel*), siatka wykresu (*grid on*)

Cel zajęć
właściwości funkcji *spline kubiczny*, interpolacja

Wzory, algorytm:
$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$, $(i = 1,2,\cdots,n-1)$
z warunkami:
(1) $a_i = f_i$, $(i = 1,2,\cdots,n-1)$, $a_n = f_n$
(2) $b_{i-1} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2c_{i-1} + c_i}{3} h_{i-1}$, $(i = 2,3,\cdots,n)$
(3) $c_{i-1}h_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + c_{i+1}h_i = 3\left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$, $(i = 1,2,\cdots,n-1)$,
$c_1 = c_n = 0$
(4) $d_{i-1} = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_{i-1}}$, $(i = 2,3,\cdots,n)$
Prawa strona równań (3) jest znana (może być obliczona na wstępie), lewa ma postać macierzy trójdiagonalnej:

$$\begin{pmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & & \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & 0 & \\ & h_3 & 2(h_3 + h_4) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Rozwiązując układ równań (3) obliczamy pozostałe współczynniki z równań (2) i (4)
Twierdzenie Holladaya:
Funkcja spline spełniająca warunki (1-4) minimalizuje krzywiznę całkowitą krzywej spośród wszystkich krzywych interpolacyjnych 3-go stopnia.
<u>algorytm:</u>
zdefiniowanie a(i)
za pomocą funkcji ones oraz diag utworzyć macierz współczynników układu równań (3)
rozwiązanie układu (3)
obliczenie pozostałych współczynników funkcji *spline*
narysowanie wykresu za pomocą podwójnej pętli: po przedziałach i wewnątrz nich

Problem:
Trasa autostrady albo kolejowa łącząca zadane punkty
Należy przeprowadzić trasę przez zadane punkty tak, aby całka z kwadratu krzywizny po długości trasy była minimalna.
Zadane punkty: 1(0,123), 2(500,542), 3(1000,453), 4(1500,722), 5(2000,321), 6(2500,148).
Przedstawić wykres obliczonej trasy.

Rozwiązanie:
(poniżej kod programu w matlabie)

```
% Adam Zaborski ćw. 4 - Interpolacja splajnem kubicznym
clc
clear all
format compact, format long
h = 500;
n = 6;
a = [123, 542, 453, 722, 321, 148];
x = [0, 500, 1000, 1500, 2000, 2500];
% prawa strona równań (3)
for i = 1:1:n-2
   v(i) = 3 / h * ( a(i) - 2 * a(i+1) + a(i+2));
end
% macierz trójdiagonalna
A = 4*diag( ones(4, 1) ) + diag( ones(3, 1), 1 ) + diag( ones(3, 1), -1 );
A = h * A;
% rozwiązanie układu równań (3)
c1 = A \ v';
% podstawienie wyników z wektora roboczego do wektora "c"
c(1) = 0;
for i = 1:1:4
   c(i+1) = c1(i);
end
c(6) = 0;
% obliczenie pozostałych współczynników
for i = 1:1:n-1
   b(i) = (a(i+1) - a(i)) / h - (c(i+1) + 2 * c(i)) / 3 * h;
   d(i) = (c(i+1) - c(i)) / 3 / h;
end
% przygotowanie danych do wykresu
k = 0;  % zerowanie licznika
nk = 20;
step_x = h / nk;   % krok dla "x"
for j = 1:1:n-1;   % pętla po przedziałach
   a_1 = a(j); b_1 = b(j); c_1 = c(j); d_1 = d(j);  % podstawienie współczynników
   for i = 1:1:nk; % pętla wewnątrz każdego przedziału
      k = k + 1;
      x1(k) = (k-1) * step_x;
      y1(k) = a_1 + b_1 * (x1(k) - x(j)) + c_1 * (x1(k) - x(j))^2 + d_1 * (x1(k) - x(j))^3;
   end
end
% wykres y1(x1)
plot(x, a,'o',x1, y1)
grid on
title('Spline kubiczny')
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal
xlim([0, 2500])
ylim([0, 800])
disp('koniec obliczeń')
```

Wykres obliczonej trasy: