Ćwiczenie 6 – układy równań liniowych, metody dokładne

Treść zajęć
zapis kropkowy macierzy (mnożenie), macierz odwrotna (inv)

Cel zajęć
metody dokładne – metoda Gaussa, metoda Cholesky'ego, zapoznanie się z metodami poprzez ich zapis w programie, sprawdzenie gotowymi funkcjami

Wzory, algorytm
<u>metoda eliminacji Gaussa:</u>
polega na sprowadzeniu układu *n* równań $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ do postaci trójkątnej za pomocą przekształceń równoważnych (eliminacji):

$$\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

Ponieważ układ $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{c}$ ma te same rozwiązania, co układ wyjściowy, można, poczynając od ostatniego równania obliczać kolejne niewiadome postepowaniem wstecz.
1. eliminacja
(w pętli po *k* = 1,...,*n*-1)

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}/a_{kk} \\ b_i = b_i - a_{ik}b_k/a_{kk} \end{cases}, \quad i,j = k+1,\cdots,n$$

2. postępowanie wstecz

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \; i = n,\cdots,1$$

<u>metoda Cholesky'ego (Banachiewicza)</u>
ponieważ_ dla każdej symetrycznej dodatnio określonej macierzy **A** istnieje jednoznaczny rozkład trójkątny $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LL}^T$, można wyjściowy układ równań zapisać w postaci:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{LL^Tx} = \boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{L^Tx} = \boldsymbol{y}, \;\; \boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$$

gdzie $\boldsymbol{L}$ – macierz dolna trójkątna:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

czyli zastąpić rozwiązywanie układu równań rozwiązaniem dwóch układów równań o macierzach trójkątnych, sprowadzającego się do wyliczania po kolei niewiadomych.
1. faktoryzacja
(w pętli po *k* = 1,...,*n*)

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}, \qquad l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}l_{kj}\right)\frac{1}{l_{kk}}, \quad (i = 1,\cdots,n)$$

2. postępowanie wprzód

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j}{l_{ii}}, \;\; i = 1,\cdots,n$$

3. postępowanie wstecz

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji}x_j}{l_{ii}}, \;\; i = n,\cdots,1$$

Problem:
Rozwiązać poniższy układ metodą Gaussa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Rozwiązać podany układ równań metodą Cholesky'ego (Banachiewicza):

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie

(kod matlaba)

```
% Adam Zaborski, ćw. 6_Gauss - metoda eliminacji Gaussa
clc
clear all
format compact
n = 3;
A = [3, 1, 6; 2, 1, 3; 3, 1, 1];
b = [2, 7, 4];
%eliminacja Gaussa
for k = 1: n - 1
   for i = k + 1: n
      for j = k + 1: n
         A(i,j) = A(i,j) - A(i,k) * A(k,j) / A(k,k);
      end
      b(i) = b(i) - A(i,k) * b(k) / A(k,k);
   end
end
%postępowanie odwrotne
x = zeros(1, n);   % prealokacja dla szybszego wykonania obliczeń
for i = n: -1: 1
   s = 0;
   for j = i + 1: n
      s = s + A(i,j) * x(j);
   end
   x(i) = (b(i) - s) / A(i,i);
end
%odświeżenie wartości
A = [3, 1, 6; 2, 1, 3; 3, 1, 1];
b = [2, 7, 4];
%wydruk i sprawdzenie poprawności rozwiązania
disp('metoda eliminacji Gaussa')
disp('macierz współczynników'), disp(A)
disp('wektor prawych stron'), disp(b)
disp('rozwiązanie:'), disp(x)
disp('weryfikacja rozwiązania (rezidua):'), disp((A*x'-b')')
%-----------------------------------------------------------------------
% Adam Zaborski, ćw. nr 6_Cholesky
n = 3;
A = [9, -2, 6; -2, 5, 2; 6, 2, 8];
b = [5, 2, 3];
%tworzenie macierzy trójkątnej dolnej L; A=L(transp)*L
L = zeros(n,n);  % prealokacja, dla szybszego wykonania kodu pętli
```

```
for k=1:n
   s=0;
   for j = 1:k - 1
      s = s + L(k,j)*L(k,j);
   end
   L(k,k) = sqrt( A(k,k) - s );
   for i = 1: n
      s = 0;
      for j = 1: k - 1
         s = s + L(i,j) * L(k,j);
      end
      L(i,k) = (A(i,k) - s) / L(k,k);
   end
end
% postępowanie wprzód
%y = ones(1,n);  % prealokacja
for i = 1: n
   s = 0;
   for j = 1: i - 1
      s = s + L(i,j) * y(j);
   end
   y(i) = (b(i) - s) / L(i,i);
end
% postępowanie odwrotne
for i = n: -1: 1
   s = 0;
   for j = i + 1: n
      s = s + L(j,i) * x(j);
   end
   x(i) = (y(i) - s) / L(i,i);
end
%wydruk i sprawdzenie poprawności rozwiązania
disp('-----------------------------------------------')
disp('metoda Cholesky''ego')
disp('macierz A:'), disp(A)
disp('wektor prawych stron:'), disp(b)
disp('rozwiązanie:'), disp(x)
disp('weryfikacja rozwiązania (rezidua):'), disp((A*x'-b')')
```