Ćwiczenie 11 – układ równań nieliniowych, metoda Newtona

Treść zajęć:
funkcja w *m*-pliku funkcyjnym - powtórzenie

Cel zajęć:
Poznanie metody poprzez jej zaprogramowanie rozwiązanie układu równań nieliniowych, metoda Newtona dla układu równań,

Wzory, algorytm:
Równanie zwisu liny
równanie osi liny pod własnym ciężarem:

$$y = \frac{H}{q}\cosh\left[\frac{q}{H}(x + C_1)\right] + C_2$$

gdzie H – jest naciągiem liny (rzut siły podłużnej na os pozioma), q – ciężarem jednostkowym liny, stałe C_1 i C_2 wyznaczane są z warunków brzegowych
długość liny wyraża się wzorem:

$$s = \frac{H}{q}\sinh\left[\frac{q}{H}(l + C_1)\right] - \frac{H}{q}\sinh\frac{qC_1}{H}$$

Znając długość liny i jej ciężar jednostkowy a także warunki brzegowe (współrzędne miejsca zamocowania) można wyliczyć potrzebny naciąg liny i stałe całkowania.
Metoda Newtona dla układu równań nieliniowych:
$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
daje następujące kolejne oszacowania rozwiązania:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x^{(2)}} & -\frac{\partial f_1}{\partial x^{(2)}} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x^{(1)}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_{x=x_i}$$

gdzie jakobian:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x^{(2)}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial f_2}{\partial x^{(2)}} \end{bmatrix}$$

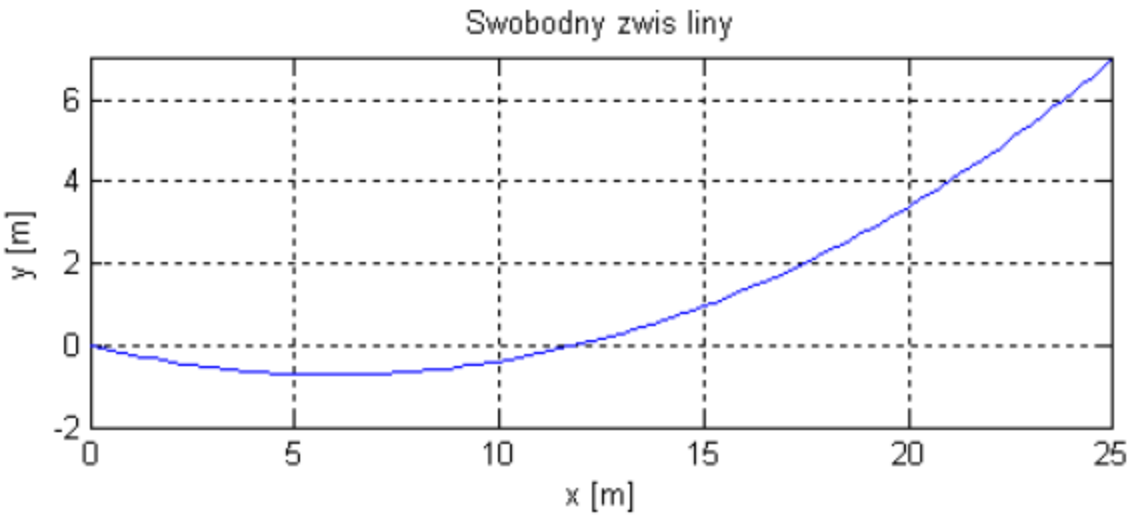
Problem:
Znając długość liny l = 27 [m], jej ciężar jednostkowy q = 42 N/m oraz wiedząc, że jest ona rozpięta miedzy dwoma punktami oddalonymi o 25 m przy różnicy wysokości 7 m, określić naciąg liny (rzut siły na poziomy kierunek) oraz stałe całkowania i sporządzić wykres osi liny.
Wskazówka: rozwiązać wstępnie zadanie dla dowolnej wartości naciągu, a następnie określić właściwy naciąg metodą prób i błędów.

Rozwiązanie
(kod matlaba)

```
% Adam Zaborski, ćw. 11, m-plik funkcyjny
function f = f_11(H_q, c_1, c_2, x)
f = H_q * cosh(( x + c_1 ) / H_q ) + c_2;
%-----------------------------------------------------------------------------------------------------------
---------------------------
% Adam Zaborski, ćw. 11 - metoda Newtona dla układu równań
```

```
% użycie funkcji z m-pliku funkcyjnego
clc
clear all
format compact
q = 42;
dlu = 25;
wys = 7;
H = 1039.35       % wartość "ręcznie" zmieniana tak, by długość liny była równa 27 [m]
Hq = H / q;
krok = 0.001;
eps = 0.001;
c = [1, 1];
for i = 1:1:20
    f1  = f_11( Hq, c(1), c(2), 0 );
    f2  = f_11( Hq, c(1), c(2), dlu ) - wys;
    f = [f1, f2];
    f11 = f_11( Hq, c(1) + krok, c(2), 0 );
    f12 = f_11( Hq, c(1), c(2) + krok, 0 );
    f21 = f_11( Hq, c(1) + krok, c(2), dlu ) - wys;
    f22 = f_11( Hq, c(1), c(2) + krok, dlu ) - wys;
    a = [(f11-f1)/krok, (f12-f1)/krok; (f21-f2)/krok, (f22-f2)/krok];
    J = det( a );
    b = [(f22-f2)/krok, -(f12-f1)/krok; -(f21-f2)/krok, (f11-f1)/krok];
    c1 = c';
    c1 = c' - 1 / J * b * f';
    c = c1';
    if norm( f ) < eps
        break;
    end
end
i, c, f
dlu_c = Hq*sinh((dlu+c(1))/Hq)-Hq*sinh(c(1)/Hq)
% dane do wykresu
n = 100;
for i = 1:1:n+1
    x1(i) = dlu / n * (i-1);
    y1(i) = f_11( Hq, c(1), c(2), x1(i) );
end
plot(x1, y1)
xlabel('x [m]')
ylabel('y [m]')
title('Swobodny zwis liny')
grid on
axis equal
xlim([0, 25])
ylim([-2, 7])
```

Wykres:


Swobodny zwis liny
y [m]
x [m]
6
4
2
0
-2
0
5
10
15
20
25