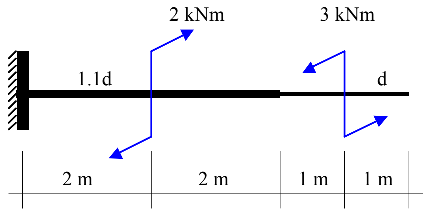
Skręcanie

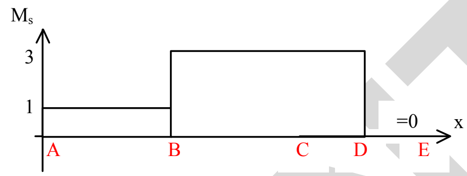
Przykład – skręcanie przekroju kołowego

Dla skręcanego pręta, jak na rysunku, sporządzić wykres kąta skręcenia, jednostkowego kąta skręcenia oraz obliczyć maksymalne naprężenia styczne. Dane: d = 6 cm, G = 80 GPa.



Rozwiązanie:

Zaczynamy od wykresu momentu skręcającego:



korzystając ze wzoru na kąt skręcenia jednego przekroju względem drugiego:

$$\varphi_{12} = \frac{M_s l}{GJ_0} = \frac{M_s l}{G\pi d^4/32} \,[\mathrm{rd}]$$

obliczamy kąty skręcenia poszczególnych przedziałów:

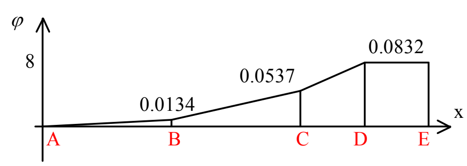
$$\varphi_{AB} = \frac{1\times10^3\times2\times32}{80\times10^9\times\pi(1.1\times0.06)^4} = 0.0134\,[\mathrm{rd}]$$

$$\varphi_{BC} = \frac{3\times10^3\times2\times32}{80\times10^9\times\pi(1.1\times0.06)^4} = 0.0403\,[\mathrm{rd}]$$

$$\varphi_{CD} = \frac{3\times10^3\times2\times32}{80\times10^9\times\pi\times0.06^4} = 0.0395\,[\mathrm{rd}]$$

$$\varphi_{DE} = 0$$

wykres kąta skręcenia odnosimy do przekroju utwierdzenia (gdzie kąt jest równy zero) pamiętając, że kąty obrotów sumują się algebraicznie, tzn. $\varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC}$:



jednostkowe kąty skręcenia (przedziałami):

$$\Theta_{12} = \frac{M_s}{GJ_0} = \frac{\varphi_{12}}{l} \,[\mathrm{rd/m}]$$

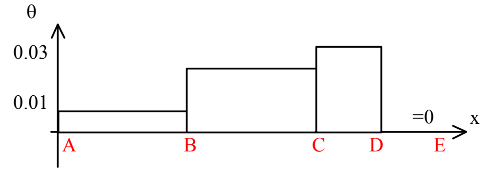
$$\Theta_{AB} = \frac{0.0134}{2} = 0.00670\,[1/\mathrm{m}]$$

$$\Theta_{BC} = \frac{0.0403}{2} = 0.0201\,[1/\mathrm{m}]$$

$$\Theta_{CD} = \frac{0.0295}{2} = 0.0295\ [1/\mathrm{m}]$$

$$\Theta_{DE} = 0$$

wykres jednostkowego kąta skręcenia



maksymalne naprężenia styczne

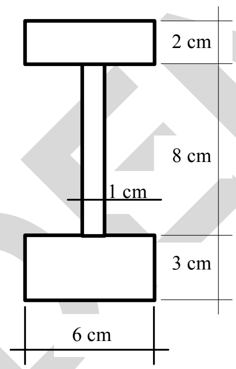
$$\max(\tau) = \max\left(\frac{M_{si}}{W_{si}}\right)$$

wystąpią w przedziale CD (największy moment, najmniejszy wskaźnik):

$$\max(\tau) = \frac{3\times 10^3 \times 16}{\pi \times 0.06^3} = 70.74\times 10^6 = 70.74\ \mathrm{MPa}$$

Przykład – skręcanie profilu cienkościennego nierozwijalnego

Określić moment bezwładności na skręcanie oraz maksymalne naprężenia styczne dla przekroju jak na rysunku, skręcanego momentem M_s = 3 kNm.



Rozwiązanie:

Dzielimy przekrój na 3 prostokąty, momenty bezwładności na skręcanie dla elementów składowych obliczamy ze wzoru:

$$J_{si} = \beta\left(\tfrac{h}{b}\right) b_i^{\,3} h_i\,,$$

gdzie wartości współczynnika β odczytujemy z tablic:

$$J_1 = 0.263\times 0.02^3 \times 0.06 = 1.262\times 10^{-7}\ \mathrm{m}^4,$$

$$J_2 = 0.307\times 0.01^3 \times 0.08 = 2.456\times 10^{-8}\ \mathrm{m}^4,$$

$$J_3 = 0.229\times 0.03^3 \times 0.06 = 3.710\times 10^{-7}\ \mathrm{m}^4,$$

dla całego przekroju:

$$J_s = 1.262\times 10^{-7} + 2.456\times 10^{-8} + 3.710\times 10^{-7} = 5.218\times 10^{-7}\ \mathrm{m}^4 = 52.18\ \mathrm{cm}^4$$

(dokładniejsza wartość z rozwiązania numerycznego zagadnienia brzegowego programem „przekrój” wynosi 54.57 cm^4, błąd ok. 4%),

równanie statyki: $M_1 + M_2 + M_3 = 3$ kNm

w równaniu statyki występują dwie nadliczbowe niewiadome, czyli potrzebne są 2 równania zgodności (geometryczne), typu:

$$\Theta_i = \Theta_j \quad \to \quad \frac{M_i}{GJ_i} = \frac{M_j}{GJ_j} \quad \to \quad M_i = \frac{J_i}{J_j} M_j$$

a więc:

$$M_1 = \frac{1.262\times10^{-7}}{2.456\times10^{-8}} M_2 = 5.14 M_2$$

$$M_3 = \frac{3.710\times10^{-7}}{2.456\times10^{-8}} M_2 = 15.11 M_2$$

skąd, po podstawieniu do równania statyki, dostajemy:

$M_1 = 725.8$ Nm,

$M_2 = 141.2$ Nm,

$M_3 = 2133$ Nm.

Maksymalne naprężenia styczne, osobno dla każdego z elementów przekroju, obliczamy ze wzoru:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{si}}{W_{si}} = \frac{M_{s1}}{\alpha\left(\frac{h}{b}\right)b_i{}^2 h_i},$$

gdzie – podobnie jak poprzednio – wartości współczynnika α odczytujemy z tablic:

$$\tau_1 = \frac{725.8}{0.267\times0.02^2\times0.06} = 113.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{141.2}{0.307\times0.01^2\times0.08} = 57.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_3 = \frac{2133}{0.246\times0.03^2\times0.06} = 160.6 \text{ MPa}$$

Ostatecznie więc, maksymalne naprężenia w pręcie wynoszą 160.6 MPa.

Przykład - skręcanie profilu cienkościennego zamkniętego

Rura o średnicy zewnętrznej d_z = 5 cm i wewnętrznej d_w = 4,5 cm została obciążona momentem skręcającym 3 kNm. Określić maksymalne naprężenia styczne rury według ścisłego wzoru dla przekroju kołowego i porównać je z wynikiem uzyskanym ze wzoru dla profilu cienkościennego zamkniętego.

a) obliczenia dla przekroju kołowego

moment bezwładności na skręcanie $J_0 = \pi\frac{d_z^4 - d_w^4}{32} = \pi\frac{0.05^4 - 0.045^4}{32} = 2.11\times10^{-7}\ \text{m}^4$

wskaźnik na skręcanie $W_0 = \frac{J_0}{r_z} = \frac{2.11\times10^{-7}}{0.025} = 8.44\times10^{-6}\ \text{m}^3$

maksymalne naprężenia styczne: $\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_0} = \frac{3\times10^3}{8.44\times10^{-6}} = 355.5$ MPa

b) obliczenia dla profilu cienkościennego zamkniętego

grubość ścianki $\delta = \frac{d_z - d_w}{2} = \frac{0.05 - 0.045}{2} = 0.0025$ m

pole wewnątrz linii środkowej $F = \pi r_{śr}^2 = \pi\left(\frac{1}{2}\times\frac{d_z + d_w}{2}\right)^2 = 1.772\times10^{-3}\ \text{m}^2$

maksymalne naprężenia styczne: $\tau_{\max} = \frac{M_s}{2F\delta} = \frac{3\times10^3}{2\times1.772\times10^{-3}\times0.0025} = 338.6$ MPa

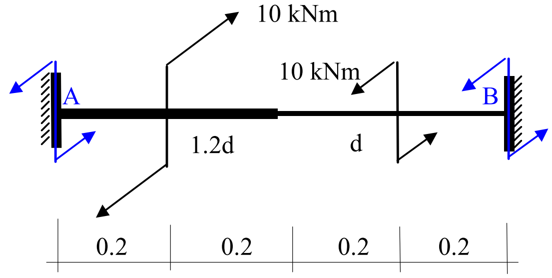
c) porównanie wyników

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{33.8.6}{355.5} = 0.952$$

Jak wynika z obliczeń, błąd oszacowania dla profilu cienkościennego wynosi ok. 5%.

Przykład – skręcanie statycznie niewyznaczalne

Narysować wykresy momentu skręcającego, jednostkowego kąta skręcenia oraz kąta skręcenia dla układu jak na rysunku. Dane: d = 0.04[m], G = 85 [GPa], $M_1 = M_2$ = 10 [kNm].



Rozwiązanie:

momenty bezwładności na skręcanie:

$$J_1 = \frac{\pi d^4}{32} = 0.251 \cdot 10^{-6} \left[\mathrm{m}^4\right], \quad J_2 = 1.2^4 J_1 = 2.074 J_1 = 0.521 \cdot 10^{-6} \left[\mathrm{m}^4\right]$$

warunek kinematyczny (równanie geometryczne): $\alpha_{AB} = 0$

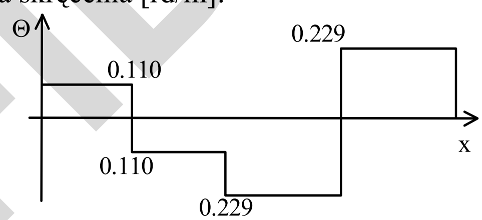
$$\frac{0.2 \times M_A}{2.074 \times GJ_1} + \frac{0.2 \times (M_A - 10)}{2.074 \times GJ_1} + \frac{0.2 \times (M_A - 10)}{GJ_1} + \frac{0.2 \times M_A}{GJ_1} = 0$$

skąd: $M_A = \dfrac{10 \times (1 + 2.074)}{2 + 2 \times 2.074} = 5$ kNm

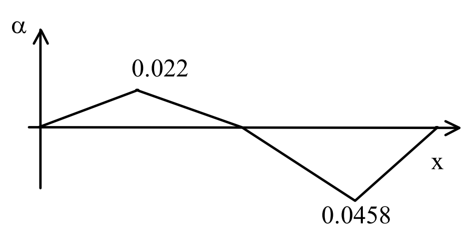
równanie statyki: $M_B = 10 - 10 - M_A = -5$ kNm

wykres momentu skręcającego:

wykres jednostkowego kąta skręcenia [rd/m]:



wykres kąta skręcenia [rd]:



maksymalne naprężenia styczne: $\max \tau = \dfrac{5 \cdot 10^3 \cdot 16}{\pi \cdot 0.04^3} = 398[\mathrm{MPa}]$.