Stan odkształcenia

Przykład 1.

Określić stan odkształcenia w punkcie A(2,-4,3), jeśli funkcje przemieszczeń są w postaci:

$$u = (xy + x^2 - y^2) \cdot 10^{-5}$$

$$v = (4x - 3y + 3x^2) \cdot 10^{-5}$$

Rozwiązanie

Z równań geometrycznych Cauchy'ego, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, obliczamy współrzędne tensora odkształcenia i podstawiamy współrzędne punktu:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = (y + 2x) \cdot 10^{-5} = (-4 + 4) \cdot 10^{-5} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -3 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(x - 2y + 4 + 6x) \cdot 10^{-5} = 36 \cdot 10^{-5}$$

Przykład 2.

Określić odkształcenie liniowe w kierunku równoległym do zadanego wektora **n**.

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}, \quad \bar{n}(3,-4)$$

Rozwiązanie

Postępujemy podobnie jak przy obliczaniu składowej normalnej wektora naprężenia.
Obliczamy wersor wektora:

$$\bar{n}(0.6,-0.8)$$

Rzut tensora odkształcenia na kierunek **n** daje wektor odkształcenia:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ij} n_j$$

gdzie pojedynczy indeks przy wyrażeniu po lewej nie oznacza „skróconego" zapisu powtarzającego się indeksu, lecz pojedynczy indeks (a więc składową wektora)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x n_x + \varepsilon_{xy} n_y = [4 \cdot 0.6 + 2 \cdot (-0.8)] \cdot 10^{-4} = 2.4 \cdot 10^{-4} - 1.6 \cdot 10^{-4} = 0.8 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{xy} n_x + \varepsilon_y n_y = [2 \cdot 0.6 - 3 \cdot (-0.8)] \cdot 10^{-4} = 1.2 \cdot 10^{-4} + 2.4 \cdot 10^{-4} = 3.6 \cdot 10^{-4}$$

Rzucając ponownie na ten sam kierunek otrzymujemy składową liniową (normalną) odkształcenia (skalar):

$$\varepsilon = \varepsilon_j n_j = 0.8 \cdot 0.6 \cdot 10^{-4} + 3.6 \cdot (-0.8) \cdot 10^{-4} = 0.48 \cdot 10^{-4} - 2.88 \cdot 10^{-4} = -2.4 \cdot 10^{-4}$$

Podobny wynik możemy uzyskać na innej drodze. Zastosujemy prawo transformacji tensorowej. Z warunków zadania wynika, że należy przetransformować wyjściową macierz odkształcenia, zapisaną w układzie (x,y), do kierunku, którego np. pierwszą oś wskazuje wersor **n**. Wersor ten jest więc pierwszym wierszem macierzy przejścia. Z warunku ortonormalności (ortogonalności i unormowania) macierzy przejścia łatwo odtworzyć drugi wiersz macierzy przejścia:

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad i = n, m, \quad j = x, y$$

Z prawa transformacji tensorowej otrzymujemy:

$$\varepsilon_n = \alpha_{nx}^2 \varepsilon_x + 2\alpha_{nx}\alpha_{ny}\varepsilon_{xy} + \alpha_{ny}^2 = 0.6^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 0.6 \cdot (-0.8) \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 0.8^2 \cdot (-3) \cdot 10^{-4} = -2.4 \cdot 10^{-4}$$

Przykład 3

Dla danego tensora odkształcenia w p.s.o. określić odkształcenia i kierunki główne

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 & 1.6 \\ 1.6 & -1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

Rozwiązanie:

Odkształcenia główne ze wzorów: $\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}{}^2}$ wynoszą:

$\varepsilon_1 = 4.468 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = -1.468 \cdot 10^{-5}$

Kierunki główne: $tg\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_x}{\varepsilon_{xy}} \Rightarrow \alpha_1 = 0.2847,\quad tg\alpha_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_x}{\varepsilon_{xy}} \Rightarrow \alpha_2 = -1.286$

gdzie α_1 jest kątem pomiędzy osią „x" układu wyjściowego a osią „1" układu głównego (dokładniej: mniejszy z 2 możliwych), α_2 to kąt pomiędzy osią „x" a osią „2", przy czym: $|\alpha_1| + |\alpha_2| = \frac{\pi}{2}$.

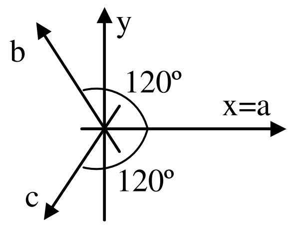
Macierz przejścia i tensor odkształcenia w układzie własnym:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9598 & 0.2808 \\ 0.2808 & -0.9598 \end{pmatrix},\quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4.468 & 0 \\ 0 & -1.468 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}$$

Przykład 4 – Rozeta tensometryczna

Ponieważ pomiar odkształcenia liniowego jest prostszy niż odkształcenia kątowego, bezpośredni pomiar składowych tensora odkształcenia (w p.s.o.), zastępuje się pomiarem odkształcenia liniowego w trzech kierunkach na płaszczyźnie.
Rozetą tensometryczną typu „delta" dokonano pomiaru odkształceń liniowych. Dla otrzymanych wyników określić macierz odkształcenia w układzie kartezjańskim (*x*,*y*).

$\varepsilon_a = 0.000075,\quad \varepsilon_b = 0.000034,\quad \varepsilon_c = -0.000048$



Rozwiązanie

Zależność, zachodzącą między odkształceniem mierzonym w dowolnym kierunku, określonym kątem α w stosunku do pierwszej osi przyjętego układu współrzędnych, można zapisać za pomocą wzoru transformacyjnego tensora odkształcenia:

$$\varepsilon_\alpha = a_{\alpha x}^2 \varepsilon_x + 2a_{\alpha x} a_{\alpha y} \varepsilon_{xy} + a_{\alpha y}^2 \varepsilon_y = \cos^2\alpha\varepsilon_x + 2\cos\alpha\sin\alpha\varepsilon_{xy} + \sin^2\alpha\varepsilon_y.$$

Oczywiście $\varepsilon_x = \varepsilon_a$. Zapisując powyższy wzór kolejno dla kierunków *b* i *c*, dostajemy układ równań:

$$0.000034 = 0.25 \cdot 0.000075 + 2 \cdot (-0.5) \cdot 0.866 \cdot \varepsilon_{xy} + 0.866^2 \varepsilon_y$$

$$-0.000048 = 0.25 \cdot 0.000075 + 2 \cdot (-0.5) \cdot (-0.866) \cdot \varepsilon_{xy} + 0.866^2 \varepsilon_y$$

z którego wyliczamy:

$\varepsilon_y = -0.000034,\quad \varepsilon_{xy} = -0.000047$

i ostatecznie macierz odkształcenia:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0.000075 & -0.000047 \\ -0.000047 & -0.000034 \end{pmatrix}$$

Przykład 5

Czy podana macierz może być macierzą odkształceń?

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 5xy - Ay^2 & Ax - By \\ 4xy - By & Bx^2 - 7xy \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie:

Aby macierz mogła być macierzą odkształcenia musi spełniać warunki całkowalności (równania nierozdzielności). Z ogólnej liczby 81 równań (z czego jedynie 6 równań jest niezależnych):

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

dla płaskiego stanu odkształcenia warunki redukują się do jednego równania:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 .$$

Po wykonaniu elementarnych obliczeń, mamy:

$$-2A + 2B - 0 = 0 \quad \rightarrow \quad A = B$$

Tak więc podana macierz może być macierzą odkształceń (czyli opisywać odkształcenia kontinuum materialnego) jeśli $A = B$.