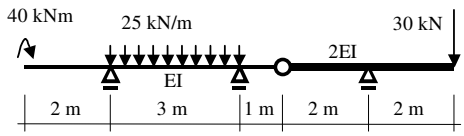
Ugięcia belki

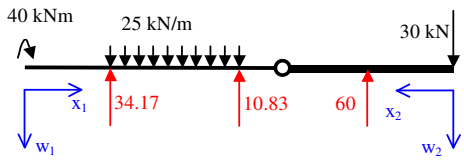
Belka, jak na rysunku:



złożona z 2 belek o różnych sztywnościach: dla belki z lewej strony EI = 10.5 MNm^2, a z prawej 2EI (dwukrotnie większa).

Metoda Clebscha

Obliczamy reakcje i wprowadzamy układy współrzędnych:



Belka z lewej:

$$M(x_1) = 40\times x_1^0\Big|_{x_1\le 2} + 34.17\times(x_1-2) - \frac{25}{2}\times(x_1-2)^2\Big|_{x_1\le 5} + \frac{25}{2}\times(x_1-5)^2 + 10.83\times(x_1-5)$$

$$EIw_1''(x_1) = -40\times x_1^0\Big|_{x_1\le 2} - 34.17\times(x_1-2) + 12.5\times(x_1-2)^2\Big|_{x_1\le 5} - 12.5\times(x_1-5)^2 - 10.83\times(x_1-5)$$

$$EIw_1'(x_1) = C_1 - 40\times x_1\Big|_{x_1\le 2} - 17.08\times(x_1-2)^2 + 4.167\times(x_1-2)^3\Big|_{x_1\le 5} - 4.167\times(x_1-5)^3 - 5.415\times(x_1-5)^2$$

$$EIw_1(x_1) = C_1\times x_1 + D_1 -$$
$$-20\times x_1^2\Big|_{x_1\le 2} - 5.695\times(x_1-2)^3 + 1.042\times(x_1-2)^4\Big|_{x_1\le 5} - 1.042\times(x_1-5)^4 - 1.805\times(x_1-5)^3$$

kinematyczne warunki brzegowe:

$w_1(2) = 0 \quad\rightarrow\quad 2C_1 + D_1 - 80 = 0$

$w_1(5) = 0 \quad\rightarrow\quad 5C_1 + D_1 - 500 - 153.8 + 84.38 = 0$

skąd wyliczamy:

$C_1 = 163.1$, $D_1 = -246.3$.

Obliczamy (pamiętając, że moment był wyrażony w kNm a nie w Nm):

$$w_1(0) = \frac{D_1}{EI} = \frac{-246.3\times 10^3}{10.5\times 10^6} = -0.0235\,\text{m},$$

$$w_1(6) = \ldots = -\frac{88.36\times 10^3}{EI} = -0.00842\,\text{m}.$$

(z programu „statyka” ugięcie w przegubie jest 0.00839, błąd wynika z zaokrągleń).

Belka z prawej:

$M(x_2) = -30\times x_2 + 60\times(x_2-2)$

$2EIw_2''(x_2) = 30\times x_2 - 60\times(x_2-2)$

$2EIw_2'(x_2) = C_2 + 15\times x_2^2 - 30\times(x_2-2)^2$

$2EIw_2(x_2) = C_2 x_2 + D_2 + 5\times x_2^3 - 10\times(x_2-2)^3$

kinematyczny warunek brzegowy:

$w_2(2) = 0 \quad\rightarrow\quad 2C_2 + D_2 + 40 = 0$

oraz warunek zgodności („zszycia”):

$w_1(6) = w_2(4)$,

skąd mamy równanie:

$$-\frac{88.36}{EI}=\frac{4C_2+D_2+320-80}{2EI}$$

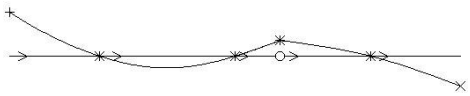
a po rozwiązaniu układu równań, mamy:

$C_2=-188.4$, $D_2=336.8$.

Obliczamy (znowu pamiętając, że moment był wyrażony w kNm a nie w Nm):

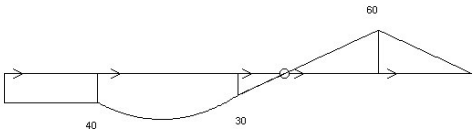
$$w_2(0)=\frac{D_2}{2EI}=\frac{336.8\times10^3}{2\times10.5\times10^6}=0.0160\,\text{m}.$$

Szkic ugięć (z programu „statyka”):

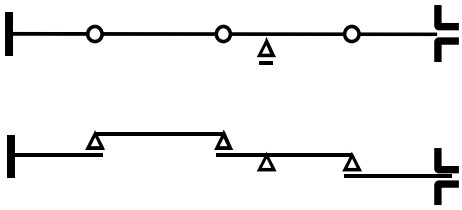


Metoda Mohra

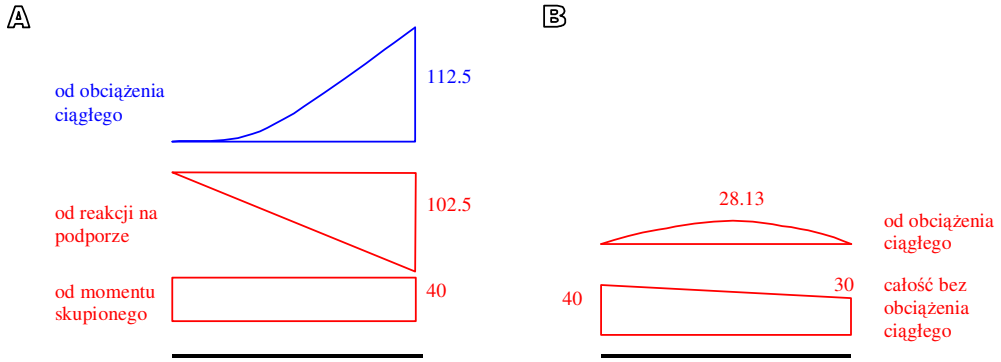
Sprawdzimy ugięcie w przegubie metodą Mohra. Wykres momentów (z programu „statyka”):



schemat belki fikcyjnej (bez obciążenia) oraz jej schemat zastępczy:



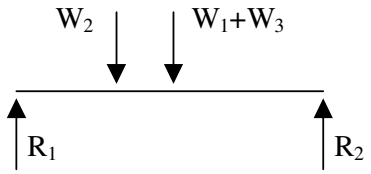
Zaczynamy obliczenia od belki górnej: obciążenie momentem zginającym (dzielonym przez lokalną sztywność zginania) możemy określić (korzystając z zasady superpozycji) jako sumę momentu od poszczególnych obciążeń. „Idąc” od lewej są to: moment skupiony, moment od siły na podporze, moment od obciążenia na wsporniku, rys.a). Można też zrobić to inaczej: trapez (który potem rozbijemy na prostokąt i trójkąt) i moment od obciążenia ciągłego na przęśle („na $ql^2/8$”), rys.b):



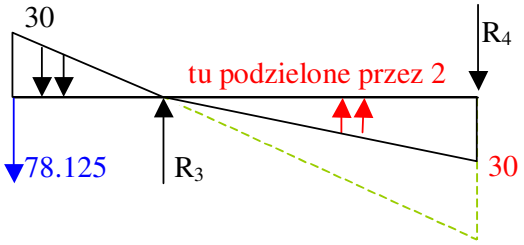
Przyjmując rozkład z rys. b), obliczamy reakcje od wypadkowych:

- prostokąt 30×3, $W_1 = 90$ (w środku przęsła)
- trójkąt 10×3, $W_2 = 15$ (w 1/3 przęsła od lewej)
- parabola 28.125×3, $W_3 = 56.25$ (w środku)

otrzymując:



$R_1 = 83.125$, $R_2 = 78.125$. Przechodzimy do belki niżej, pamiętając o zmieniającej się sztywności (wykres momentów za podporą dzielimy przez 2):



Obliczamy moment wtórny w belce fikcyjnej nad podporą 3:
$M^f = -78.125 \times 1 - 30 \times 1 \times 1/2 \times 2/3 \times 1 = -88.125$
i przeliczamy na ugięcie belki:
$w = M^f / (EI) = -88.125 \times 10^3 / (10.5 \times 10^6) = 0.00839$ m
(zgadza się „dokładnie” z wynikiem z programu „statyka”).