Równania Hooke'a

Przykład 1

Określić odkształcenia i ich kierunki główne dla stali, jeśli:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 250 & -70 \\ -70 & 140 \end{pmatrix} \text{MPa},$$

oraz E = 210 GPa, ν = 0.27

Rozwiązanie:

Na początek ważna uwaga: **płaskiemu stanowi naprężenia najczęściej nie odpowiada płaski stan odkształcenia** (i na odwrót)! Konsekwencją tego jest kolejność działań: najpierw znajdujemy naprężenia i kierunki główne a dopiero potem korzystamy ze związków Hooke'a. Jeślibyśmy postąpili odwrotnie, stanęlibyśmy przed koniecznością rozwiązania problemu własnego w stanie trójosiowym, co jest wielokrotnie bardziej złożone obliczeniowo.

Obliczamy naprężenia i kierunki główne:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 284 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 106 \text{ MPa},$$

$$\sigma_3 = 0,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = -25.91°$$

Ze wzorów Hooke'a:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}\right]$$

obliczamy odkształcenia główne:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] = 0.001010, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)\right] = 0.000139, \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] = -0.000501. \end{cases}$$

Przykład 2

Określić naprężenia główne i ich kierunki dla drewna, jeśli:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 200 & -50 \\ -50 & 120 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6},$$

oraz E = 10 GPa, ν = 0.05

Rozwiązanie:

Na początek ważna uwaga: **płaskiemu stanowi odkształcenia najczęściej nie odpowiada płaski stan naprężenia** (i na odwrót)! Konsekwencją tego jest kolejność działań: najpierw znajdujemy odkształcenia i kierunki główne a dopiero potem korzystamy ze związków Hooke'a. Jeślibyśmy postąpili odwrotnie, stanęlibyśmy przed koniecznością rozwiązania problemu własnego w stanie trójosiowym, co jest wielokrotnie bardziej złożone obliczeniowo.

Obliczamy odkształcenia i kierunki główne:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} = 0.000224\,,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} = 0.000016\,,$$

$$\varepsilon_3 = 0\,,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_x}{\varepsilon_{xy}} = -26.54°$$

Ze wzorów Hooke'a:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

obliczamy stałe materiałowe:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{10\cdot 10^9}{2\cdot 1.05} = 4.76\cdot 10^9, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{10\cdot 10^9\cdot 0.05}{1.05\cdot 0.9} = 0.529\cdot 10^9$$

i naprężenia główne:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2G\varepsilon_1 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 2.303 \\ \sigma_2 = 2G\varepsilon_2 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 1.083 \\ \sigma_3 = 2G\varepsilon_3 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 0.169 \end{cases} \text{MPa}$$

Przykład 3

Określić gęstość energii sprężystej, jeśli:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 240 & 12 & 52 \\ 12 & -80 & 70 \\ 52 & 70 & 20 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

oraz E = 210 GPa, ν = 0.27.

Wskazówka: gęstość energii sprężystej wyraża się wzorem:

$e = \frac{1}{2}A_\sigma A_\varepsilon + \frac{1}{2}D_\sigma D_\varepsilon$ (A – aksjator, D – dewiator).

Rozwiązanie:

Z równań Hooke'a znajdujemy:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = 0.00122, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] = -0.000715, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = -0.000110, \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy} = 0.000726, \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2G}\tau_{xz} = 0.000314, \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G}\tau_{yz} = 0.000423 \end{cases}$$

Każdy z tensorów rozkładamy na aksjator i dewiator:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{240 - 80 + 20}{3} = 60\,\text{MPa}$$

$$\begin{pmatrix} 240 & 12 & 52 \\ 12 & -80 & 70 \\ 52 & 70 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 180 & 12 & 52 \\ 12 & -140 & 70 \\ 52 & 70 & -40 \end{pmatrix} \text{ [MPa]}$$

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{0.001220 - 0.000715 - 0.000110}{3} = 0.000132$$

$$\begin{pmatrix} 1220 & 726 & 314 \\ 726 & -715 & 423 \\ 314 & 423 & -110 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} = \begin{pmatrix} 132 & 0 & 0 \\ 0 & 132 & 0 \\ 0 & 0 & 132 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} + \begin{pmatrix} 1088 & 726 & 314 \\ 726 & -847 & 423 \\ 314 & 423 & -242 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Z podanego wzoru na energię:

$$e = \tfrac{1}{2} a_{ij}^{(\sigma)} a_{ij}^{(\varepsilon)} + \tfrac{1}{2} d_{ij}^{(\sigma)} d_{ij}^{(\varepsilon)}$$

wynika konieczność mnożenia tablicowego macierzy (mnożenie odpowiednich elementów z dwu tablic, tzw. mnożenie kropkowe w Matlabie) i wykonania sumowania elementów macierzy wynikowej(w Matlabie podwójne użycie funkcji *sum*). W wyniku tych operacji, otrzymujemy gęstość energii:

e = 1180+216700 = 228580 [Nm/m^3] = 0.229 [MN/m^3]