Krzywe interakcji *N- M*

Nośność przekroju zginanego i rozciąganego

Jeżeli w przekroju działa moment zginający oraz siła osiowa, to osiągnięcie stanu granicznego nośności może być zobrazowane w układzie sił przekrojowych N - M jako pewna krzywa zamknięta. Krzywe takie, dla stanu granicznej nośności sprężystej oraz stanu granicznej nośności plastycznej, nazywamy *krzywymi interakcji* albo *krzywymi nośności*. Punktem wyjścia konstrukcji krzywych interakcji jest rozkład naprężenia normalnego w przekroju dla odpowiedniego stanu granicznego. Każdemu z możliwych rozkładów odpowiada punkt (*N*, *M*) na krzywej interakcji, określany na podstawie warunków równoważności (całkowania naprężeń w przekroju).
Charakterystyczną właściwością krzywych interakcji jest to, że są zawsze to krzywe wypukłe, o czym możemy się przekonać na przytoczonych poniżej przykładach.
Obszar wewnętrzny, ograniczony czterema odcinkami prostymi, stanowi obszar pracy sprężystej przekroju. Brzeg tego obszaru odpowiada nośności granicznej sprężystej. Obszar przylegający do niego określa zakres sprężysto-plastycznej pracy przekroju, a jego brzeg odpowiada osiągnięciu nośności granicznej plastycznej. Obwiednia ta determinuje zakres możliwych rozwiązań, tj. punkty na zewnątrz jej są statycznie niedopuszczalne (dla przyjętej schematyzacji Prandtla). Oznacza to że naprężenia, równoważne takim wartościom sił przekrojowych, musiałyby przekraczać granicę plastyczności. Jak widać z ogólnej postaci równań, obwiednia dla granicznej nośności plastycznej jest, generalnie, linią krzywą.

Zakres sprężysty

W zakresie sprężystym, którego przypadkiem granicznym jest stan granicznej nośności sprężystej, obowiązuje zasada superpozycji, a więc naprężenia mogą zostać wyrażone bezpośrednio poprzez siły przekrojowe:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M}{I_y} z_{skr} ,$$

gdzie przez z_{skr} oznaczono położenie włókien skrajnych (górnych i dolnych). Jak widać ze wzoru, zależność pomiędzy siłami przekrojowymi jest liniowa. Do narysowania krzywej interakcji w stanie granicznym nośności sprężystej wystarcza więc znajomość 4 punktów "skrajnych": dla ekstremalnej siły podłużnej i ekstremalnego momentu zginającego, zarówno dodatnich jak i ujemnych.
Łatwo wywnioskować, że ekstremalna siła podłużna zostanie osiągnięta dla jednorodnego pola naprężenia odpowiadającemu prostemu rozciąganiu lub ściskaniu, czyli dla pełnego uplastycznienia przekroju i $M = 0$.
Dla jakiego rozkładu naprężeń wystąpi ekstremalny moment zginający? Zapisując liniowy rozkład naprężeń w ogólnej postaci i obliczając z warunku równoważności moment zginający:

$$\sigma_x = a + bz \quad \Rightarrow \quad M = \iint_F \sigma_x z dF = a\iint_F z dF + b\iint_F z^2 dF = aS_y + bI_y = bI_y ,$$

dochodzimy do wniosku, że ekstremalny moment wystąpi dla ekstremalnej wartości parametru *b*. Kiedy to będzie miało miejsce? Odpowiedź na to pytanie jest już natychmiastowa: dla jednoczesnego uplastycznienia włókien skrajnych górnych i dolnych, przy przeciwnych znakach i osi obojętnej w połowie wysokości przekroju.

Zakres sprężysto-plastyczny

W zakresie sprężysto-plastycznym, którego granicznym przypadkiem jest stan granicznej nośności plastycznej, nie obowiązuje zasada superpozycji naprężeń od sił przekrojowych *N* i

M. Wiemy jedynie, że w stanie granicznym nośności plastycznej, rozkład naprężeń jest odcinkami stały (prostokątny):

$$\sigma_x = \begin{cases} \pm R_e, & \text{dla } z > z_0 \\ \mp R_e, & \text{dla } z < z_0 \end{cases},$$

a zależność pomiędzy siłami przekrojowymi jest, ogólnie, nieliniowa:

$$N = \iint_F \sigma_x dF = \pm R_e (F_1 - F_2), \quad M = \iint_F \sigma_x z dF = \pm R_e (S_{y1} - S_{y2}).$$

Z pierwszego z równań powyższego układu wynika że, podobnie jak w stanie granicznym nośności sprężystej, ekstremalna siła podłużna zostanie osiągnięta dla prostego rozciągania albo ściskania. O ekstremalnej wartości momentu zginającego nic nie wiadomo, z uwagi na dowolność kształtu przekroju. Wartość tę możemy, po wykonaniu całkowania warunków równoważności, określić poszukując położenia osi obojętnej dla którego wartość momentu będzie ekstremalna:

$$\frac{\partial M(z_0)}{\partial z_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{ekstr}, N.$$

Przykład - Krzywe interakcji dla trójkąta równoramiennego b × h

<u>Zakres sprężysty</u>

Rozkład naprężeń normalnych jest dany wzorem:

$$\sigma_x = \frac{2N}{bh} + \frac{36M}{bh^2} z.$$

Obliczamy punkty skrajne dla ekstremalnych wartości siły podłużnej i momentu zginającego:

- dla prostego rozciągania ($M = 0$): $\sigma_x = R_e \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{2} bhR_e, \quad M = 0,$

  albo dla prostego ściskania: $\sigma_x = -R_e \quad \Rightarrow \quad N = -\frac{1}{2} bhR_e, \quad M = 0,$

  jest to jednocześnie ekstremalna siła podłużna, jaka może być przenoszona przez przekrój.
- jednoczesne uplastycznienie skrajnych włókien, o znakach naprężeń przeciwnych, odpowiadające ekstremalnemu momentowi zginającemu:

  $\sigma_x(z = \frac{2}{3}h) = R_e, \quad \sigma_x(z = -\frac{1}{3}h) = -R_e, \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{6} bhR_e, \quad M = -\frac{1}{18} bh^2 R_e,$

  albo:

  $\sigma_x(z = \frac{2}{3}h) = -R_e, \quad \sigma_x(z = -\frac{1}{3}h) = R_e, \quad \Rightarrow \quad N = -\frac{1}{6} bhR_e, \quad M = \frac{1}{18} bh^2 R_e,$

<u>Zakres sprężysto-plastyczny</u>

Rozkład naprężeń normalnych jest prostokątny:
Z uwagi na symetrię przekroju i naprężeń, obliczenia przeprowadzamy dla połowy jego szerokości, danej równaniem:

$$\tfrac{1}{2} b(z) = -\frac{b}{2h} z + \frac{b}{3}.$$

Warunki równoważności:

$$N = 2R_e \left[-\int_{-\frac{h}{3}}^{z_{ob}} dz \int_0^{\frac{1}{2}b(z)} dy + \int_{z_{ob}}^{\frac{2}{3}h} dz \int_0^{\frac{1}{2}b(z)} dy \right] = \ldots = 2bhR_e \left(\frac{z_0^{\,2}}{2h^2} - \frac{2z_0}{3h} - \frac{1}{36} \right),$$

$$M = 2R_e \left[-\int_{-\frac{h}{3}}^{z_{ob}} z dz \int_0^{\frac{1}{2}b(z)} dy + \int_{z_{ob}}^{\frac{2}{3}h} z dz \int_0^{\frac{1}{2}b(z)} dy \right] = \ldots = 2bh^2 R_e \left(\frac{z_0^{\,3}}{3h^3} - \frac{2z_0^{\,2}}{3h^2} + \frac{4}{81} \right).$$

Ekstremalna siła podłużna wystąpi dla osi obojętnej w nieskończoności ($M = 0$). Dla ekstremalnego momentu położenie osi obojętnej wyniesie:

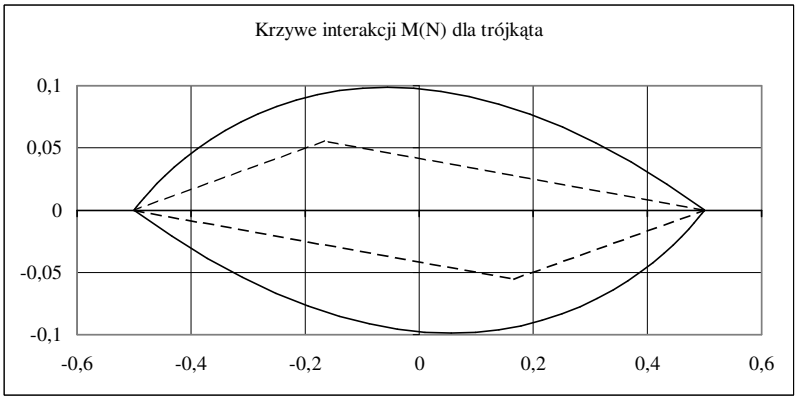
$\frac{\partial M}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_o = 0,$ drugi pierwiastek nie ma sensu fizycznego.

Moment ekstremalny i odpowiadająca mu siła podłużna wynoszą więc:

$$M(z_0 = 0) = \tfrac{8}{81} bh^2 R_e = 0.0988 bh^2 R_e$$
$$N(z_0 = 0) = -\tfrac{1}{18} bhR_e = -0.0556 bhR_e \,.$$

Analogiczne obliczenia możemy przeprowadzić dla rozkładu naprężeń o przeciwnych znakach. Wówczas i rozwiązanie zmienia znaki.

Wyniki przedstawia poniższy wykres dla bezwymiarowych sił przekrojowych.



Przykład - Krzywe interakcji dla teownika

Przyjmujemy dane do obliczeń: półka 5 × 1 cm, środnik 1 × 5 cm, R_e = 200 MPa. Obliczamy położenie środka ciężkości, z = 4 cm, oraz moment bezwładności I_y = 33.33 cm^4.

<u>Zakres sprężysty</u>

Ekstremalna siła podłużna, dla rozciągania i ściskania, wynosi: $N = R_eF = \pm$ 200 kN, przy czym $M = 0$.

Ekstremalny moment osiągnięty zostanie dla równoczesnego uplastycznienia skrajnych włókien i osi obojętnej w połowie wysokości przekroju, czyli dla:

$$\sigma_x = \pm(a + bz) = \pm\left(\frac{R_e}{3} + \frac{100R_e}{3} z\right) \quad \Rightarrow \quad a = \pm\tfrac{1}{3} R_e, \quad b = \pm\tfrac{100}{3} R_e \,.$$

Jest więc:

$$N = aF = \mp 66.67 \text{ kN}, \quad M = bI_y = \pm 2.22 \text{ kNm}.$$

<u>Zakres sprężysto-plastyczny</u>

Ekstremalna siła podłużna wystąpi, podobnie jak dla granicznej nośności sprężystej, dla prostego rozciągania i ściskania.

W stanie granicznym plastycznym, prostokątny rozkład naprężeń jest osiągany dla dwóch przypadkach szczególnych położenia osi obojętnej:

1. oś obojętna przechodzi przez półkę, $0.01 \le z_0 \le 0.02$,
2. oś obojętna przechodzi przez środnik, $-0.04 \le z_0 \le 0.01$.

Całkując warunki równoważności w pierwszym przypadku, dostajemy:

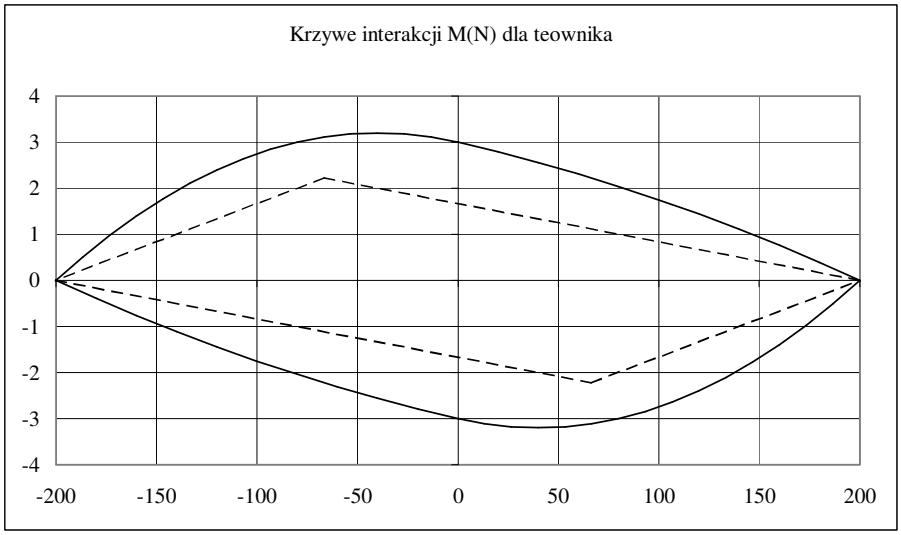
$$N = \pm R_e\left[0.05(0.02 - z_0) - 0.05(z_0 - 0.01) - 0.01 \cdot 0.05\right] = \pm 2(0.01 - z_0)10^7,$$

$$M = \pm R_e\left[0.05(0.02 - z_0)0.5(0.02 + z_0) - 0.05(z_0 - 0.01)0.5(z_0 + 0.01) + 0.05 \cdot 0.01 \cdot 0.015\right] = \pm\left(0.0004 - z_0{}^2\right)10^7 \,.$$

Ekstremum momentu leży poza przedziałem.

W drugim przypadku, mamy:

$$N = \pm R_e \left[0.05 \cdot 0.01 + 0.01(0.01 - z_0) - 0.01(z_0 + 0.04)\right] = \pm 4(0.01 - z_0)10^6,$$

$$M = \pm R_e \left[0.05 \cdot 0.01 \cdot 0.015 + 0.01(0.01 - z_0)0.5(0.01 + z_0) - 0.01(z_0 + 0.04)0.5(z_0 - 0.04)\right] = \pm 2\left(0.0016 - z_0{}^2\right)10^6.$$

Ekstremum momentu wystąpi dla $z_0 = 0$: N = 40 kN, M = 3.2 kNm.