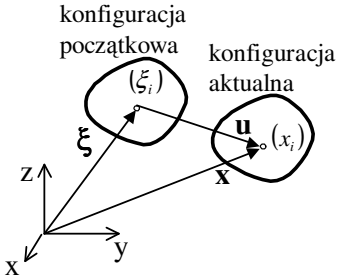
Stan odkształcenia

Współrzędne materialne i przestrzenne



Wprowadzamy globalny układ odniesienia w postaci kartezjańskiego układu współrzędnych i wyróżniamy 2 stany: konfigurację pierwotną ξ (początkową, nieobciążoną) oraz konfigurację ciała aktualną x (końcową, odkształconą). Deformacja ośrodka pod względem geometrycznym zostanie określona przez znajomość zależności:

$$u_i = x_i - \xi_i,$$

gdzie $u_i = u_i\,(u, v, w)$ jest wektorem przemieszczenia z konfiguracji pierwotnej do aktualnej. Przemieszczenie jest to różnica (geometryczna) wektorów wodzących punktu w konfiguracji końcowej i początkowej.
Odkształceniem nazywamy zmianę kształtu ośrodka pod wpływem obciążeń. Deformacja ciała jest pojęciem szerszym, obejmującym obok odkształcenia także ruch sztywny ośrodka.
Jako konfigurację odniesienia możemy przyjąć zarówno konfigurację pierwotną jak i aktualną (ale także i pewną dowolną konfigurację pośrednią). Opis możemy prowadzić dwojako:

- traktując współrzędne ξ_α jako niezależne identyfikujemy w przestrzeni położenie cząstek materialnych, interesuje nas ruch określonego punktu ciała - są to tzw. *współrzędne Lagrange'a* albo inaczej *materialne*,
- traktując współrzędne x_i jako niezależne identyfikujemy w przestrzeni położenie punktów przestrzennych, interesuje nas co dzieje się w określonym punkcie przestrzeni - są to tzw. *współrzędne Eulera* albo inaczej *przestrzenne*.

W mechanice ciała stałego używane są najczęściej współrzędne materialne (określa się położenie wybranego punktu materialnego), w hydrodynamice - przestrzenne (dla ustalonego punktu przestrzeni określa się prędkość przepływu, ciśnienie itp.).

Tensory odkształceń skończonych

Pochodne względem współrzędnych materialnych i przestrzennych wyrażą się odpowiednio:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} = x_{i,\alpha} = u_{i,\alpha} + \delta_{i\alpha}, \quad \xi_{\alpha,i} = \delta_{\alpha i} - u_{\alpha,i},$$

ich różniczki zupełne odpowiednio:

$$dx_i = x_{i,\alpha} d\xi_\alpha, \quad d\xi_\alpha = \xi_{\alpha,i} dx_i,$$

gdzie wielkości $x_{i,\alpha}, \xi_{\alpha,i}$ są tzw. *gradientami deformacji*, stanowiącymi podstawową miarę deformacji ciała.
Kwadraty długości elementarnego odcinka w konfiguracji pierwotnej i aktualnej zapiszemy w obu układach współrzędnych jako:

$$ds_0^2 = d\xi_\alpha d\xi_\alpha = d\xi_\alpha d\xi_\beta \delta_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha,i} dx_i \xi_{\beta,j} dx_j \delta_{\alpha\beta}, \quad ds^2 = dx_i dx_i = \ldots = x_{i,\alpha} d\xi_\alpha x_{j,\beta} d\xi_\beta \delta_{ij}.$$

Ich różnica, a więc kwadrat zmiany długości elementarnego odcinka, wynosi:

$$ds^2 - ds_0^2 = dx_i dx_i - d\xi_\alpha d\xi_\alpha = \begin{cases} \left(x_{i,\alpha} x_{j,\beta} \delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta}\right) d\xi_\alpha d\xi_\beta \\ \left(\delta_{ij} - \xi_{\alpha,i} \xi_{\beta,j} \delta_{\alpha\beta}\right) dx_i dx_j \end{cases}$$

Zdefiniujmy odpowiednio tensor odkształcenia lagranżowski $E_{\alpha\beta}$ i eulerowski e_{ij}, jako:

$$E_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}\left(x_{i,\alpha} x_{j,\beta} \delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta}\right), \qquad e_{ij} := \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \xi_{\alpha,i} \xi_{\beta,j} \delta_{\alpha\beta}\right).$$

Wyrażając zmienne niezależne w powyższych definicjach poprzez współrzędne przemieszczenia, otrzymujemy:

$$E_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left[\left(u_{i,\alpha}+\delta_{i\alpha}\right)\left(u_{j,\beta}+\delta_{j\beta}\right)\delta_{ij}-\delta_{\alpha\beta}\right]=\ldots=\frac{1}{2}\left(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}+u_{k,\alpha}u_{k,\beta}\right),$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left[\delta_{ij}-\left(\delta_{\alpha i}-u_{\alpha,i}\right)\left(\delta_{\beta j}-u_{\beta,j}\right)\delta_{\alpha\beta}\right]=\ldots=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}-u_{\alpha,i}u_{\alpha,j}\right).$$

Założenie o małych pochodnych przemieszczeń

Typowe wartości pochodnych w konstrukcjach budowlanych to $10^{-6}\div10^{-4}$. Przyjmujemy zatem założenie o małych pochodnych przemieszczeń: $\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta}<<1$.

W wyniku tego założenia, znikają ostatnie człony tensorów odkształceń, zawierające nieliniowość. Ponadto, dla małych przemieszczeń zanika różnica między konfiguracją pierwotną i odkształconą.

Dla naszych potrzeb nie jest potrzebne rozróżnienie konfiguracji ciała, jeśli tylko będziemy zdawali sobie sprawę z uproszczonego sposobu rozumowania, w którym utożsamiamy wszystkie wirtualne konfiguracje ciała (początkową, pośrednią i końcową.)

Tensor Cauchy'ego

Utożsamiając współrzędne materialne i przestrzenne dochodzimy do definicji *tensora infinitezymalnych odkształceń Cauchy'ego*:

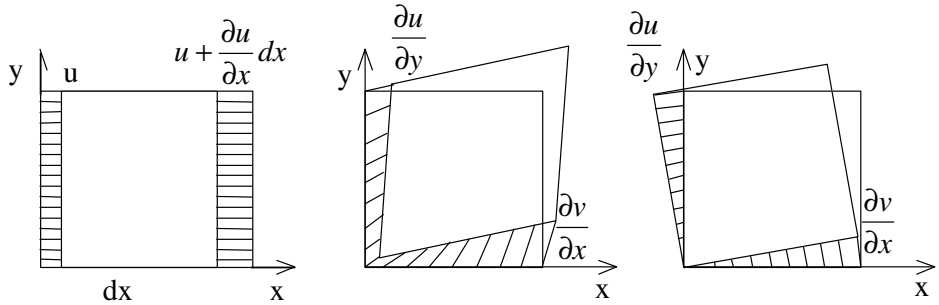
$$\varepsilon_{ij}:=\tfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\,.$$

W zapisie inżynierskim powyższe związki, zwane *równaniami Cauchy'ego*, mają postać:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},\varepsilon_{xy}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\varepsilon_{xz}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\varepsilon_{yz}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Interpretacja składowych tensora odkształcenia

Rozpatrzmy 3 szczególne przypadki stanu odkształcenia:



1. Wydłużenie względne. Dla pierwszego przypadku obliczmy wydłużenie względne jako stosunek wydłużenia do długości całkowitej w kierunku osi *x*. Otrzymujemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_x\,.$$

   Odkształcenia na przekątnej głównej przedstawiają względną zmianę długości (wydłużenie bądź skrócenie względne) odcinka równoległego do osi układu współrzędnych.
2. Zmiana postaci elementarnej powierzchni. Obliczmy połowę zmiany kąta prostego, jak widać bezpośrednio z rysunku:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\varepsilon_{xy}$$

   Tzw. odkształcenie postaciowe przedstawia połowę zmiany kąta prostego.
3. Sztywny obrót. Mamy:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad\varepsilon_{xy}\equiv0\quad\Rightarrow\quad\varepsilon_{ij}\equiv0.$$

Znikanie tensora odkształcenia jest WKW ruchu ciała sztywnego.

Na podstawie powyższych rozważań możemy powiedzieć, że współrzędne tensora odkształcenia na przekątnej głównej przedstawiają wydłużenia względne odcinków równoległych do odpowiednich osi układu współrzędnych, a współrzędne poza przekątną — odkształcenia postaciowe, czyli połowy zmiany kątów o jakie zmieniają się kąty proste między odcinkami równoległymi do odpowiednich osi układu współrzędnych. Odkształcenia są bezwymiarowe.