Stateczność – metoda energetyczna

Energia sprężysta równa jest sumie energii potencjalnej i pracy sił zewnętrznych: $E = U - L$. Warunkiem równowagi w stanie krytycznym jest zerowanie się wariacji funkcjonału energii sprężystej:

$$\delta E = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta U = \delta L \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \Delta L ,$$

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ} dx = \tfrac{1}{2} \int_0^l EJ (w'')^2 dx$$

$\Delta L = Pv$, v - pionowe przesunięcie,

$$\Delta L = \tfrac{1}{2} P \int_0^l (w')^2 dx,$$

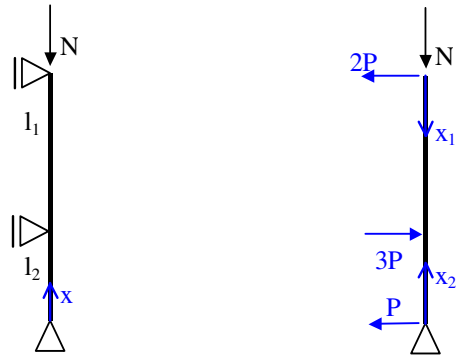
skąd ostatecznie:

$$P_{kr} = \frac{\int_0^l EJ (w''(x))^2 dx}{\int_0^l (w'(x))^2 dx}$$

Metoda energetyczna daje przybliżenie z nadmiarem (na niekorzyść pewności).
Dokładność metody zależy w dużym stopniu od jakości przyjętej aproksymacji funkcji ugięcia. Aby funkcja ta była bliska rzeczywistej, żądamy spełnienia przez nią kinematycznych a często i statycznych warunków brzegowych.

Przykład 1

Obliczenie eulerowskiej siły krytycznej dla 2-piętrowego słupa: l_1 = 4 m, l_2 = 2 m metodą energetyczną i ścisłą.



<u>Metoda energetyczna:</u>

1. przybliżenie: rozwiązania poszukujemy dla funkcji $w(x) = a\,(x^3 + bx^2 + cx + d)$, dla której żądamy spełnienia kinematycznych warunków brzegowych : $w(0) = w(l_1) = w(l_1 + l_2) = 0$, skąd:

$$w(x) = a\,(x^3 - 10x^2 + 24x)$$

   i ostatecznie, ze wzoru:

$$P_{kr} = 1.458\ EJ$$

2. przybliżenie: rozwiązania poszukujemy dla funkcji $w(x) = a\,(x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f)$, dla której żądamy spełnienia nie tylko kinematycznych warunków brzegowych (jak poprzednio: $w(0) = w(l_1) = w(l_1 + l_2) = 0$), ale także statycznych warunków brzegowych:

$$w''(0) = w''(l_1 + l_2) = 0,$$

skąd dostajemy po podstawieniu do wzoru:

$$P_{kr} = 0.952\ \mathrm{EJ}$$

Porównajmy wyniki z ścisłym rozwiązaniem.

Ścisła metoda rozwiązania:

dla $0 < x_1 < l_1$, $\quad w_1'' + k_1^2 w_1 = -\dfrac{P}{EJ} x_1$, podstawiając $k^2 \equiv \dfrac{N}{EJ}$

otrzymujemy (c.o.r.j.+c.s.r.n.):

$$w_1(x) = A \sin k_1 x_1 + B_1 \cos k_1 x_1 - \frac{P}{N} x_1$$

z warunkami brzegowymi:

$$w_1(0) = w_1(l_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1(x_1) = \frac{P_1 l_1}{N \sin k_1 l_1} \sin k_1 x_1 - \frac{P_1}{N} x_1 ,$$

(analogicznie dla $0 < x_2 < l_2$). Warunki zgodności rozwiązań mają postać: $w_1'(l_1) = -w_2'(l_2)$, $w_1''(l_1) = -w_2''(l_2)$.

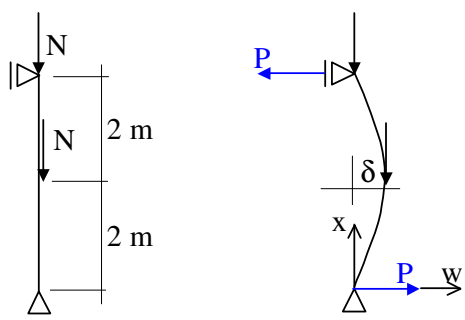
Z porównania drugich pochodnych wynika $k_1 = -k_2 = k$, a z warunku na pierwsze pochodne otrzymujemy po przekształceniach:

$$k\left(\frac{\cos kl_1}{\sin kl_1} + \frac{\cos kl_2}{\sin kl_2}\right) = \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \quad \Rightarrow \quad k = 0.9642 \quad \Rightarrow \quad N = k^2 EJ = 0.930 EJ \ .$$

Jak widać, 2. przybliżenie jest znacznie dokładniejsze (ok. 2 % błędu w stosunku do błędu 170% dla 1. przybliżenia).

Przykład 2.

Pręt jak na rysunku obciążony jest dwiema jednakowymi siłami ściskającymi. Wyznaczyć wartość krytyczną P.



Metoda energetyczna

Poszukując rozwiązania metodą kolokacji i przyjmując rozwiązanie w postaci $w = a \sin \pi x / l$ (funkcja spełnia warunki kinematyczne i statyczne – zerowanie się momentu na końcach pręta), po podstawieniu do wzoru (praca sił zewnętrznych obliczana jest w dwóch przedziałach), otrzymujemy:

$$P_{kr} = 6.565 \frac{EJ}{l^3} = 0.4103 EJ \ .$$

Rozwiązanie ścisłe

Zapisujemy równania ugięcia pręta przedziałami:

$x > 0.5l$: $\quad EJ w_1'' = -N w_1 - N\delta \dfrac{l - x}{l}$,

$x < 0.5l$: $\quad EJ w_2'' = -N w_2 - N\delta \dfrac{l - x}{l} + N(\delta - w_2)$.

Oznaczając $k^2 = \frac{N}{EJ}$, całki ogólne tych równań można zapisać:

$w_1 = A_1 \sin kx_1 + B_1 \cos kx_1 - \delta \frac{l - x}{l}$ oraz $w_2 = A_2 \sin \sqrt{2}kx_2 + B_2 \cos \sqrt{2}kx_2 + \frac{\delta x_2}{2l}$

Z warunków brzegowych: $w_1(l) = w_2(0) = 0, \quad w_1\left(\frac{l}{2}\right) = w_2\left(\frac{l}{2}\right) = \delta$ oraz warunku zgodności:

$w_1'\left(\frac{l}{2}\right) = w_2'\left(\frac{l}{2}\right)$, otrzymujemy po przekształceniach:

$\frac{1}{2} - \frac{1.5kl}{\tan 2k} - \frac{1.5kl}{\sqrt{2}\tan 2\sqrt{2}k} = 0$, skąd z rozwiązania numerycznego mamy $k = 0.6391$, czyli

$$P_{kr} = 6.536\frac{EJ}{l^2} = 0.4085EJ\ ,$$

wobec czego błąd metody energetycznej można oszacować na 0.44%.