Twierdzenia ekstremalne teorii plastyczności

Oprócz nośności przekroju (sprężystej i plastycznej) używane jest także pojęcie nośności granicznej konstrukcji, czyli największego obciążenia przenoszonego przez konstrukcję (inaczej: *obciążenia niszczącego*). Tzw. *twierdzenia ekstremalne* teorii nośności granicznej wynikają z zasady prac wirtualnych i dostarczają dolnego i górnego oszacowania nośności granicznej układu.

> *Statycznie dopuszczalnym nazywamy takie pole naprężeń, które jest niesprzeczne z nośnością plastyczną układu.*

Dla schematyzacji Prandtla (model ciała idealnie sprężysto-plastycznego) oznacza to spełnienie warunku $|\sigma_x| \le R_e$ w każdym punkcie albo $M \le \overline{\overline{M}}$ w każdym przekroju belki zginanej.

> *Kinematycznie dopuszczalnym nazywamy takie pole przemieszczeń, które jest niesprzeczne z istniejącymi więzami.*

Oznacza to np. brak ugięcia na podporze belki czy brak obrotu osi belki w utwierdzeniu.

Twierdzenie o oszacowaniu dolnym

> *Konstrukcja nie ulegnie zniszczeniu jeżeli dla zadanego obciążenia może być znalezione statycznie dopuszczalne pole naprężeń.*

Innymi słowy, jeśli dla zadanego obciążenia można znaleźć równoważące je naprężenia, będące statycznie dopuszczalnymi, to konstrukcja znajduje się w zakresie bezpiecznej pracy, bądź co najwyżej na jego brzegu. Przeniesienie obciążenia nie implikuje przekroczenia dopuszczalnych wartości naprężenia — nośność konstrukcji jest nie mniejsza od takiego obciążenia. Jest to więc oszacowanie od dołu.

Twierdzenie o oszacowaniu górnym

> *Konstrukcja zamienia się w mechanizm (ulega zniszczeniu), jeśli dla kinematycznie dopuszczalnego pola przemieszczeń przyrost pracy sił zewnętrznych równy jest przyrostowi pracy sił wewnętrznych.*

Inaczej mówiąc, jeżeli dla zrównoważenia istniejącego obciążenia potrzebna jest zamiana konstrukcji w mechanizm, to obciążenie to jest nie mniejsze od granicznego (niszczącego). Obciążenie powodujące powstanie mechanizmu jest więc oszacowaniem od góry.

Atrakcyjność powyżej sformułowanych twierdzeń wynika z łatwości uzyskania oszacowań. Jest to szczególnie widoczne w przypadku konstrukcji statycznie niewyznaczalnych, dla których obliczenia są prostsze niż w sprężystym zakresie pracy. Umiejętne zastosowanie twierdzeń ekstremalnych, umożliwia określenie przedziału rozwiązania ścisłego, którego dokładna wartość często nie jest niezbędna.

Odkształcenia plastyczne koncentrują się w pewnych obszarach, jak np. *przeguby plastyczne* dla belek zginanych. Poza obszarami takiej lokalizacji odkształcenia są znacznie mniejsze. Można przyjąć z dobrym przybliżeniem, że konstrukcja posiada szereg obszarów nie odkształconych, doznających jedynie ruchu jako ciała sztywne. W ten sposób konstruuje się *schematy zniszczenia* konstrukcji, kiedy konstrukcja zamienia się w mechanizm.

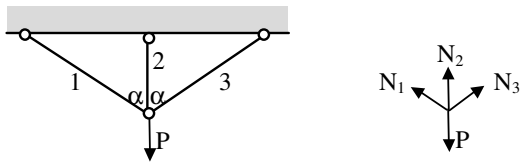
Możliwe są dwa sposoby otrzymania końcowego schematu zniszczenia konstrukcji. Pierwszy sposób polega na wprowadzaniu kolejnych obszarów lokalizacji odkształceń (przegubów) aż do zamiany konstrukcji w mechanizm. Drugi – polega na przyjęciu obszarów lokalizacji odkształceń od razu w takiej ilości, która powoduje zamianę konstrukcji na mechanizm.

Jeżeli otrzymane rozwiązanie będzie zarówno statycznie jak i kinematycznie dopuszczalne, to będzie ono rozwiązaniem ścisłym. Wówczas oszacowanie od góry jest równe oszacowaniu od dołu.

Stwierdzenie odwrotne również jest prawdziwe: jeżeli oszacowania od góry i od dołu pokrywają się, to rozwiązanie jest ścisłe a schematy zniszczenia (statycznie dopuszczalny i kinematycznie dopuszczalny) są identyczne.

Przykład: kratownica

Określić nośność kratownicy dla danych: $F_1 = 2$ cm^2, $F_2 = 3$ cm^2, $F_3 = 4$ cm^2, kąt $\alpha = \pi/6$, $R_e = 200$ MPa.



<u>a) Oszacowanie od dołu metodą statycznie dopuszczalnych pól naprężeń</u>

Rozwiązania poszukiwać będziemy metodą schematów zniszczenia. Zakładamy uplastycznienie tylu prętów ile potrzeba do zamiany układu w mechanizm. W tym przypadku istnieją 3 takie możliwości i przeanalizujemy je kolejno.

Schemat 1

Zakładamy uplastycznienie pręta 1 i 2:

$$N_1 = \overline{\overline{N}}_1 = F_1 R_e = 40 \text{ kN}, \quad N_2 = \overline{\overline{N}}_2 = F_2 R_e = 60 \text{ kN}.$$

Z równań równowagi dla węzła kratownicy mamy:

$$N_3 = \overline{\overline{N}}_1, \quad P = \overline{\overline{N}}_2 + \tfrac{1}{2}(N_3 + \overline{\overline{N}}_1) = 100 \text{ kN}.$$

Sprawdzamy, czy naprężenie w pręcie 3 nie przekracza granicy plastyczności:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{40 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 100 \text{ MPa} < R_e,$$

a więc przyjęte pole naprężeń jest statycznie dopuszczalne. Dla tego schematu otrzymujemy więc oszacowanie:

$$\overline{\overline{P}} = 100 \text{ kN}.$$

Schemat 2

Zakładamy uplastycznienie pręta 1 i 3:

$$N_1 = \overline{\overline{N}}_1 = F_1 R_e = 40 \text{ kN}, \quad N_3 = \overline{\overline{N}}_3 = F_3 R_e = 80 \text{ kN}.$$

Z równań równowagi od razu wynika brak równowagi: $\Sigma X \neq 0$. Taki schemat jest więc statycznie niedopuszczalny.

Schemat 3

Zakładamy uplastycznienie pręta 2 i 3:

$$N_2 = \overline{\overline{N}}_2 = F_2 R_e = 60 \text{ kN}, \quad N_3 = \overline{\overline{N}}_3 = F_3 R_e = 80 \text{ kN}.$$

Z równania $\Sigma X = 0$ mamy:

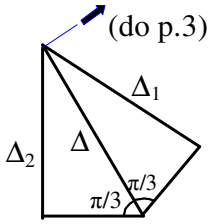
$$N_1 = \overline{\overline{N}}_3 = 80 \text{ kN}, \text{ skąd: } \sigma_1 = 400 \text{ MPa} > \mathrm{R_e}.$$

Z faktu przekroczenia granicy plastyczności wynika że również i ten schemat jest statycznie niedopuszczalny.

Ostateczną odpowiedź stanowi wynik schematu 1: $\overline{\overline{P}} = 100 \text{ kN}$.

b) Oszacowanie od góry metodą kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń

Ponownie zastosujemy metodę schematów zniszczenia. Aby układ zamienił się w mechanizm, potrzeba uplastycznienia 2 prętów. Zakładamy, że będą to pręty 1 i 2. Wówczas ruch układu będzie odbywał się wokół pręta 3, traktowanego jako sztywny (odkształcenia sprężyste są pomijalnie małe).



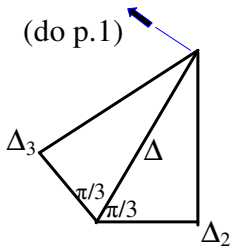
Z rysunku wynika, że $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta \sin \pi/3$. Porównanie pracy sił zewnętrznych i wewnętrznych:

$$P\Delta_2 = N_1\Delta_1 + N_2\Delta_2 = \Delta_2(N_1 + N_2),$$

daje:

$$\overline{\overline{P}} = N_1 + N_2 = (F_1 + F_2)R_e = 5\cdot 10^{-4}\cdot 200\cdot 10^6 = 100\text{kN}.$$

Ponieważ uzyskaliśmy identyczny wynik jak dla oszacowania z dołu, jest to rozwiązanie dokładne i nie ma potrzeby analizować kolejnych schematów: minimum zostało osiągnięte. Aby się jednak przekonać, że tak jest w istocie, rozpatrzmy inny schemat: uplastycznienia prętów 2 i 3.



Z rysunku ruchu układu wokół pręta 1 (sztywnego) i porównania prac sił zewnętrznych i wewnętrznych wynika:

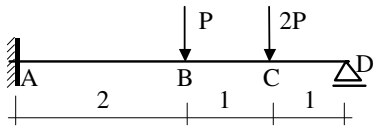
$$P\Delta_2 = N_2\Delta_2 + N_3\Delta_3 = \Delta_2(N_2 + N_3),$$

skąd mamy kolejne oszacowanie od góry:

$$\overline{\overline{P}} = N_2 + N_3 = (F_2 + F_3)R_e = 7\cdot 10^{-4}\cdot 200\cdot 10^6 = 140\text{kN}.$$

Zgodnie z przewidywaniem, uzyskane oszacowanie jest gorsze (z nadmiarem).
Jak widać metoda statycznie dopuszczalnych pól naprężeń jest prostsza w zastosowaniu do kratownic, gdyż w metodzie kinematycznej nie możemy uniknąć zapisu równań geometrycznych. Dla belek jest akurat odwrotnie, co pokazuje następny przykład.

Przykład: belka zginana



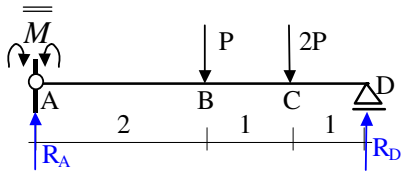
Określenia nośności belki z rysunku będziemy poszukiwali określając oszacowanie górne i dolne rozwiązania.

a) statycznie dopuszczalne pola naprężeń

Zastosujemy metodę kolejnych przegubów plastycznych. Przeguby plastyczne tym różnią się od „normalnych” przegubów, że występuje w nich moment zginający równy nośności pla-

stycznej przekroju, $\overline{\overline{M}}$, o zwrocie zgodnym z rozciąganymi włóknami. Aby określić przekrój w którym powstanie ekstremalny moment zginający, należy najpierw znaleźć wykres momentów dla belki statycznie niewyznaczalnej. Jednak z uwagi na liniowy odcinkami wykres momentu, w grę wchodzą jedynie 3 przekroje: utwierdzenie i pod siłami skupionymi, co daje 3 możliwości wyboru pierwszego przegubu plastycznego.

Schemat 1



Wprowadzenie przegubu plastycznego w przekroju A czyni belkę statycznie wyznaczalną:

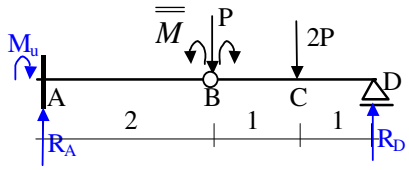
$$R_A = P + \frac{\overline{\overline{M}}}{4}, \quad R_D = 2P - \frac{\overline{\overline{M}}}{4}, \text{ oraz: } M_B = 2P - \frac{\overline{\overline{M}}}{2}, \quad M_C = 2P - \frac{\overline{\overline{M}}}{4}$$

Ponieważ $M_B < M_C$, przyjmijmy kolejny przegub plastyczny w przekroju C. Otrzymamy wówczas oszacowanie nośności belki oraz wynikowy moment w przekroju B:

$$\overline{\overline{P}} = \tfrac{5}{8}\overline{\overline{M}}, \quad M_B = \tfrac{3}{4}\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{M}}\ .$$

Ponieważ M_B jest mniejszy od momentu granicznego plastycznego, schemat jest statycznie dopuszczalny. Łatwo sprawdzić, że przyjęcie 2. przegubu plastycznego w przekroju B dawałoby moment $M_C = 1.25\ \overline{\overline{M}} > \overline{\overline{M}}$, co jest statycznie niedopuszczalne. Rozwiązaniem dla tego schematu jest $\overline{\overline{P}} = \tfrac{5}{8}\overline{\overline{M}}$.

Schemat 2



Jeśli przyjmiemy powstanie pierwszego przegubu plastycznego w przekroju B, to mamy:

$$R_D = P + \overline{\overline{M}}/2\,,\ R_B = P - \overline{\overline{M}}/2\,,\ M_A = 4P\,,\ M_C = P + \overline{\overline{M}}/2\,.$$

Przyjmując powstanie kolejnego przegubu w p.A, mamy:

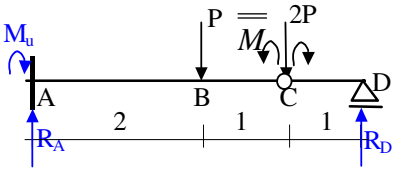
$$\overline{\overline{P}} = \tfrac{1}{4}\overline{\overline{M}}, \quad M_C = \tfrac{3}{4}\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{M}} \text{ (dopuszczalny)}$$

Jeśli natomiast przyjmiemy kolejny przegub w p.C, dostajemy:

$$\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{M}}/2\,, \text{ oraz } M_A = 2\overline{\overline{M}} > \overline{\overline{M}} \text{ (niedopuszczalny).}$$

Dla tego schematu odpowiedzią jest: $\overline{\overline{P}} = \tfrac{1}{4}\overline{\overline{M}}$.

Schemat 3



Na koniec, przyjmując powstanie pierwszego przegubu w przekroju C, mamy:

$$R_D = \overline{\overline{M}}\,,\ R_C = -\overline{\overline{M}}\,,\ M_B = 2\overline{\overline{M}} - 2P\,,\ M_A = -4\overline{\overline{M}} + 8P\,.$$

Dla kolejnego przegubu, powstałego w p.A, mamy:

$$\overline{\overline{P}} = \tfrac{5}{8}\overline{\overline{M}}\,,\ M_B = \tfrac{3}{4}\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{M}}\,, \text{ (dopuszczalny)}$$

a dla drugiego przegubu w p.B, jest:

$$\overline{\overline{P}} = \tfrac{1}{2}\overline{\overline{M}}\ ,\ M_A = 0 < \overline{\overline{M}}\ ,\ \text{(dopuszczalny)}.$$

Ponieważ są to oszacowania od dołu, wybieramy wartość górną: $\overline{\overline{P}} = \tfrac{5}{8}\overline{\overline{M}}$.

Ostatecznie więc nośność graniczna plastyczna belki będzie rozwiązaniem największym spośród wszystkich statycznie dopuszczalnych:

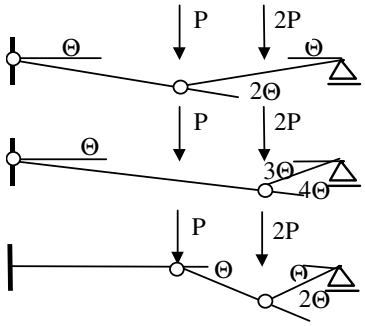
$$\overline{\overline{P}} = \max(\tfrac{5}{8}\overline{\overline{M}}, \tfrac{1}{2}\overline{\overline{M}}, \tfrac{1}{4}\overline{\overline{M}}, \tfrac{5}{8}\overline{\overline{M}}) = \tfrac{5}{8}\overline{\overline{M}}\ .$$

<u>b) kinematycznie dopuszczalne pola przemieszczeń</u>

Zastosujemy metodę schematów zniszczenia. Dla kolejnych schematów, z zasady prac wirtualnych, porównujemy pracę sił zewnętrznych (obliczaną z odpowiednim znakiem) z pracą uogólnionych sił wewnętrznych na uogólnionych przemieszczeniach (ta praca jest zawsze dodatnia):

Wykres momentów od obciążeń skupionych jest linią łamaną. Najbardziej prawdopodobne jest przyjęcie przegubów uplastycznienia w przekrojach na granicach przedziałów. Do zamiany belki w mechanizm kinematyczny (o jednym stopniu swobody) potrzeba 2 przegubów plastycznych. Potencjalnymi przekrojami, w których mogą utworzyć się przeguby plastyczne są 3 przekroje. Istnieją zatem 3 najbardziej prawdopodobne schematy zniszczenia (rys.)

Dla kolejnych schematów mamy:



$$2\Theta P + 2P\Theta = 3\overline{\overline{M}}\Theta \quad \Rightarrow \quad P_1 = 0.75\overline{\overline{M}}$$

$$2\Theta P + 2P3\Theta = 5\overline{\overline{M}}\Theta \quad \Rightarrow \quad P_2 = 0.625\overline{\overline{M}}$$

$$2P\Theta = 3\overline{\overline{M}}\Theta \quad \Rightarrow \quad P_3 = 1.5\overline{\overline{M}}$$

Podejście kinematyczne daje oszacowanie od góry (belka zniszczy się zarówno przy sile P_1, P_2 jak i P_3), wybieramy więc wartość najmniejszą, $\overline{\overline{P}} = 0.625\overline{\overline{M}} = \tfrac{5}{8}\overline{\overline{M}}$. Identyczny wynik, otrzymany poprzednio dla metody statycznej upewnia nas, że uzyskane rozwiązanie jest rozwiązaniem dokładnym.