Wzory dla płaskiego stanu naprężenia (odkształcenia, tensora bezwładności)

Analiza płaskiego stanu naprężenia (odkształcenia czy też macierzy bezwładności w postaci tensorowej – moment dewiacji z minusem) sprowadza się do określenia wartości własnych i kierunków własnych (głównych). Wartości własne są dane wzorami:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

czasem w zmodyfikowanej postaci jako:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}\right]$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left[\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}\right]$$

Inne modyfikacje wyżej wymienionych wzorów są możliwe i na tyle oczywiste, że nie wywołują kontrowersji.

Inaczej jest ze wzorami na kierunki główne, czyli de facto na kąt obrotu osi układu wyjściowego (x, y) do układu głównego $(1, 2)$.

Najczęściej używanym wzorem w podręcznikach wytrzymałości materiałów jest wzór w postaci:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

(Y. C. Fung, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, W-wa 1969, str. 85, wzór 3.6.6). Zakłada się że $\sigma_x \neq \sigma_y$; w przeciwnym przypadku każdy kierunek jest główny. Jest to o tyle użyteczny wzór, że umożliwia określenie kierunków głównych bez obliczania samych wartości własnych. Jednak interpretacja kąta jest nieco skomplikowana. Z uwagi na okresowość funkcji tangens, mamy rozwiązanie $\alpha \pm n\frac{\pi}{2}, n = 0,1,\cdots$ (kierunki główne są do siebie prostopadłe). Kąt z zakresu $\alpha\epsilon(-45°, 45°)$ oznacza kąt pomiędzy osią x a pierwszym kierunkiem głównym (gdy $\sigma_x > \sigma_y$) albo drugim kierunkiem głównym (gdy $\sigma_x < \sigma_y$), jeśli w obu wypadkach $\sigma_1 > \sigma_2$.

Prostsze w interpretacji są wzory wynikające wprost z zagadnienia wartości własnych:

$$\begin{cases}(\sigma_{11} - \lambda_1)w_1 + \sigma_{12}w_2 = 0\\ \sigma_{21}w_1 + (\sigma_{22} - \lambda_1)w_2 = 0\end{cases}$$

gdzie: $w_1 = \cos\alpha_1, w_2 = \sin\alpha_1$ (kosinusy od pierwszej osi układu wyjściowego do pierwszej i drugiej osi układu głównego, odpowiednio)
Powyższy układ równań jednorodnych redukuje się do jednego niezależnego równania, z pierwszego mamy wzór:

$$\frac{w_2}{w_1} = \tan\alpha_1 = \frac{\lambda_1 - \sigma_{11}}{\sigma_{12}}$$

(por. np. S. Piechnik, *Mechanika techniczna ciała stałego*, Wyd. PK 2007, str. 103)

z drugiego mamy wzór:

$$\frac{w_2}{w_1} = \tan\alpha_1 = \frac{\sigma_{12}}{\lambda_1 - \sigma_{22}}$$

(A. Bodnar, *Wytrzymałość materiałów*, Wyd. PK 2004, wzór 5.5, ale też M. Paluch, *Mechanika teoretyczna*, Wyd. PK 1999, wzór (5.24), str. 173)

Oba wzory są poprawne i dają takie same wyniki, co łatwo sprawdzić choćby „empirycznie".

Natomiast w S. Piechnik, *Wytrzymałość materiałów*, Wyd. PK 2000, na str. 77 jest inaczej definiowana macierz przejścia i uzyskane wzory są jeszcze inne.

Ogólnie macierz przejścia (por. M. Paluch, op. cit., wzory 5.12) może być definiowana dwojako; jako przejście z układu (x, y, z) do głównego $(1, 2, 3)$:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = [A]\{n\}$$

czy jako przejście z układu głównego do wyjściowego:

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = [A]^T\{n'\}$$

W pierwszym przypadku dla układu płaskiego macierz przejścia jest:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a w drugim:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

We wzorach macierzowych łatwo się pomylić, bo jest dla przejścia ze starego układu do nowego:

$$[T'_\sigma] = [A][T_\sigma][A]^T$$

albo z nowego układu do starego:

$$[T_\sigma] = [A]^T[T'_\sigma][A]$$

Dlatego chyba lepszy jest zapis tensorowy, bo po rozpisaniu, niezależnie od definicji macierzy przejścia, wiadomo co trzeba podstawić:

$$\sigma_{12} = a_{1x}a_{2x}\sigma_x + a_{1x}a_{1y}\tau_{xy} + \cdots$$

i np. współczynnik a_{2z} oznacza kosinus kąta pomiędzy osiami „2" i „z" (i nawet „kolejność" osi nie gra roli z uwagi na parzystość funkcji kosinus).